Matemáticas I
Funciones reales continuas y límite funcional

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

October 2, 2014

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Observa que en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Observa que en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Para poder hablar de la continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto. Si no se conoce el valor de una función en un punto no puede comprobarse si la condición anterior se verifica o no en dicho punto y, por ello, no tiene sentido considerar la continuidad de esa función en dicho punto.

Continuidad lateral

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Continuidad lateral

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la derecha** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a \leqslant x < a + \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Continuidad lateral

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la derecha** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a \leqslant x < a + \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto no vacío $C \subset A$, si f es continua en todo punto de C.

Suma y producto de funciones continuas

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que:

Suma y producto de funciones continuas

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que:

1. Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

Suma y producto de funciones continuas

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que:

1. Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.
2. Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula es una función continua.

Continuidad de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a.

Continuidad de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a.

En particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

Continuidad de las funciones elementales

- Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.

Continuidad de las funciones elementales

- Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.
- Todas las funciones elementales (logaritmos, exponenciales, potencias reales, trigonométricas y sus inversas) son continuas en sus dominios naturales de definición.

Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la “proximidad” de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la “proximidad” de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.

Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Dados una función $f:A\to\mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C\subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x)=f(x)$ para todo $x\in C$.

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Si I es un intervalo ***abierto*** y la *restricción* de f al conjunto $I\cap A$, $f_{|I\cap A}$, es continua entonces f es continua en $I\cap A$.

Conservación local del signo

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in]a-r, a+r[\cap A$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. Es decir, si $f(a) > 0$ se tiene que $f(x) > 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\cap A$, y si $f(a) < 0$ se tiene que $f(x) < 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\cap A$.

Teoremas de Bolzano y del Valor Intermedio

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Teoremas de Bolzano y del Valor Intermedio

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Si I es un intervalo y $a, b \in I$ son puntos de I con $a < b$ se verifica que todos los puntos comprendidos entre a y b también están en I, es decir $[a, b] \subset I$. Esta propiedad solamente la tienen los intervalos.

Teoremas de Bolzano y del Valor Intermedio

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Si I es un intervalo y $a, b \in I$ son puntos de I con $a < b$ se verifica que todos los puntos comprendidos entre a y b también están en I, es decir $[a, b] \subset I$. Esta propiedad solamente la tienen los intervalos.

El siguiente resultado nos dice que una función continua en un intervalo toma todos los valores comprendidos entre cada dos valores que toma.

Teoremas de Bolzano y del Valor Intermedio

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Si I es un intervalo y $a, b \in I$ son puntos de I con $a < b$ se verifica que todos los puntos comprendidos entre a y b también están en I, es decir $[a, b] \subset I$. Esta propiedad solamente la tienen los intervalos.

El siguiente resultado nos dice que una función continua en un intervalo toma todos los valores comprendidos entre cada dos valores que toma.

Teorema del valor intermedio

La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Consecuencias del teorema de Bolzano

Existencia de raíces. Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Consecuencias del teorema de Bolzano

Existencia de raíces. Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Ceros de polinomios de grado impar. Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano puede usarse para probar que algunas ecuaciones tienen solución.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano puede usarse para probar que algunas ecuaciones tienen solución.Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano puede usarse para probar que algunas ecuaciones tienen solución.Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano puede usarse para probar que algunas ecuaciones tienen solución.Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I, que es lo que queríamos probar.

Continuidad y monotonía

Continuidad y monotonía

Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona y su función inversa es continua.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.
Toma valores positivos porque $f(2) = 2 > 0$ y toma valores negativos porque $f(0) = -2 < 0$. Dicha función no se anula nunca.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.
Toma valores positivos porque $f(2) = 2 > 0$ y toma valores negativos porque $f(0) = -2 < 0$. Dicha función no se anula nunca.

Es decir, si trabajamos solamente con números racionales el teorema de los ceros de Bolzano no se cumple.

La propiedad que faltaba de $\mathbb{R}$

Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

La propiedad que faltaba de $\mathbb{R}$

Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales. El axioma que vamos a poner prohíbe que en la **recta real** pase esto de modo que a cada punto de la recta real le corresponderá un único número real.

La propiedad que faltaba de $\mathbb{R}$

Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales. El axioma que vamos a poner prohíbe que en la **recta real** pase esto de modo que a cada punto de la recta real le corresponderá un único número real.

Axioma del continuo. Si A y B son conjuntos no vacíos de números reales tales que todo número de A es menor o igual que todo número de B, entonces se verifica que hay algún *número real* que es mayor o igual que todos los números de A y menor o igual que todos los números de B.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x + u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1 + 2x) = 2$$

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Tenemos que $z \in \mathbb{R}^+$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x + u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1 + 2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Tenemos que $z \in \mathbb{R}^+$.
Por lo antes visto, z no puede estar ni en A ni en B, es decir no puede ser $z^2 < 2$ ni tampoco $z^2 > 2$. Luego ha de ser $z^2 = 2$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.

iv) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.

iv) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

v) Si hay algún elemento de E que también sea minorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *mínimo* de E y lo representaremos por $\min(E)$.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principio del ínfimo. Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Observa que

$$z \leqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \leqslant \inf(E)$$

Demostración del teorema de Bolzano

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I. Sean $a \in I$, $b \in I$ tales que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Definamos el conjunto

$$E = \{x \in [a, b] : f(t) < 0, \ \forall t \in [a, x]\}$$

y sea $c = \sup(E)$. Se verifica entonces que $f(c) = 0$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in B$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **máximo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene máximo, es decir, existe algún punto $v \in B$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in B$.

Extremos absolutos

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **máximo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene máximo, es decir, existe algún punto $v \in B$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **mínimo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene mínimo, es decir, existe algún punto $u \in B$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

En consecuencia, *la imagen por una función continua f de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es también un intervalo cerrado y acotado $f\big([a,b]\big)=[m,M]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.*

Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

En consecuencia, *la imagen por una función continua f de un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es también un intervalo cerrado y acotado $f\big([a, b]\big) = [m, M]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.*

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es el siguiente resultado:

Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

En consecuencia, *la imagen por una función continua f de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es también un intervalo cerrado y acotado $f\big([a,b]\big) = [m,M]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.*

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es el siguiente resultado:

Una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

Límite funcional

En lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

Representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ *sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo* I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

- f es continua en a.

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

- f es continua en a.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Límites laterales

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

Límites laterales

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \beta$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

  a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = L$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales)

Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales)

Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a".
  Simbólicamente escribimos $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en** $+\infty$, y escribimos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.
Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable.**

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x), \quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, $\quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iv) Supongamos que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$ y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Entonces se verifica que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a} (fg)(x) = +\infty$.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

La continuidad permuta con el paso al límite.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

La continuidad permuta con el paso al límite.

Si g es continua en el punto $L = \lim_{x\to a} f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(L)$$

Simbólicamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x))}$$

Funciones asintóticamente equivalentes

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Funciones asintóticamente equivalentes

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x)(x \to a)$, cuando $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Funciones asintóticamente equivalentes

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, y escribimos $f(x)\sim g(x)(x\to a)$, cuando $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Sean f y g funciones asintóticamente equivalentes en un punto $a\in\mathbb{R}$ o bien $a=+\infty$ o $a=-\infty$, y $h\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ una función cualquiera. Se verifica que

$$\lim_{x\to a} f(x)h(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} g(x)h(x)=L$$

donde L puede ser un número real o bien $+\infty$ o $-\infty$.

Límites en infinito de funciones racionales

Sean $P(x) = c_n X^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ una función polinómica de grado n con $c_n > 0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ otra función polinómica de grado m con $b_m > 0$. Se verifica que:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n > m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Discontinuidades de las funciones monótonas

Sea f una función monótona definida en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo se verifica que existen los límites laterales de f. Por tanto en dichos puntos f solamente puede tener discontinuidades de salto.

Discontinuidades de las funciones monótonas

Sea f una función monótona definida en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo se verifica que existen los límites laterales de f. Por tanto en dichos puntos f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{|\ln x|^{\mu}}{x^{\alpha}}=0$ para todos $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\ln x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$
- $\lim_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big|\ln|x|\big|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\ln x|^\mu}{x^\alpha} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$
- $\lim_{x\to 0} |x|^\alpha \,\big|\ln|x|\big|^\mu = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- Las exponenciales positivas crecen más rápidamente que las potencias.
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\mu x}} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu > 0.$$

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse.

Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse.

Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g.

Por ejemplo, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$?

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse.

Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g.

Por ejemplo, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$?

Respuesta: absolutamente nada.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse.

Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g.

Por ejemplo, si sabemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$?

Respuesta: absolutamente nada.

En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$ donde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo** “$\infty - \infty$”.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto.

Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x \to a} (fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".**

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto.

Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x \to a} (fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".**

Aparecen otras indeterminaciones al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$".

Indeterminaciones en el cálculo de límites

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto.

Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "** $0\,\infty$**"**.

Aparecen otras indeterminaciones al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$".

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x))$$

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^{∞}")

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^∞")
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^0")

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^{∞}")
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^{0}")
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^{0}")

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^{∞}")
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^{0}")
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^{0}")

Indeterminaciones en el cálculo de límites

También hemos de considerar indeterminaciones que aparecen en funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera.Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados conocidos, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "1^{∞}")
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "∞^{0}")
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "0^{0}")

La mayoría de los límites que tienen algún interés son límites indeterminados. Las derivadas proporcionan técnicas que en muchos casos permitirán calcular con comodidad dichos límites.